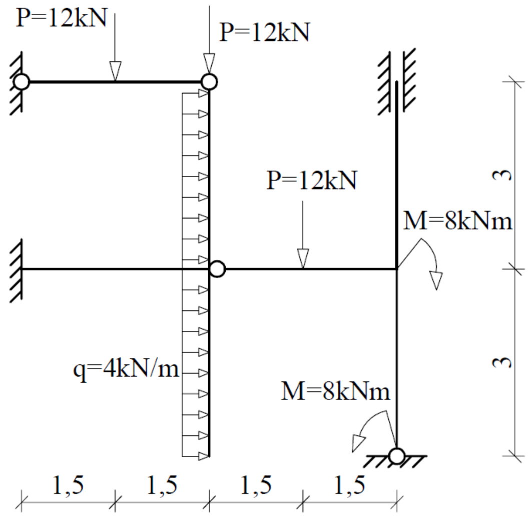


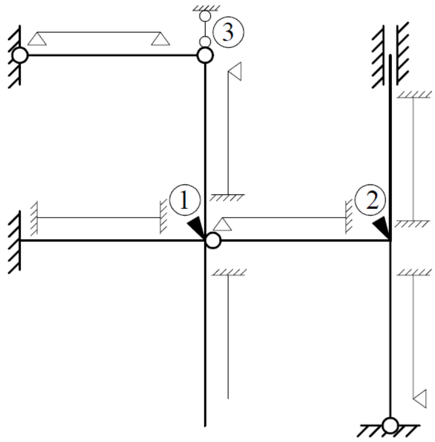
Sporządzić wykresy momentów zginających, sił tnących i normalnych w ramie metodą przemieszczeń. Wykonać sprawdzenie z twierdzenia redukcyjnego.

Rozwiązanie:

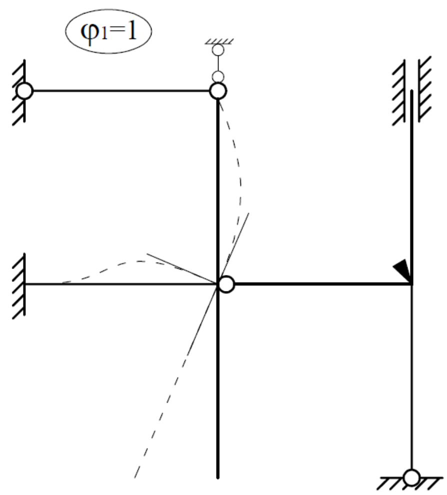
Dla zadanej ramy zakładamy schemat podstawowy metody przemieszczeń, blokując możliwe obroty i przesunięcia węzłów. Otrzymujemy schemat trzyrokrotnie geometrycznie niewyznaczalny

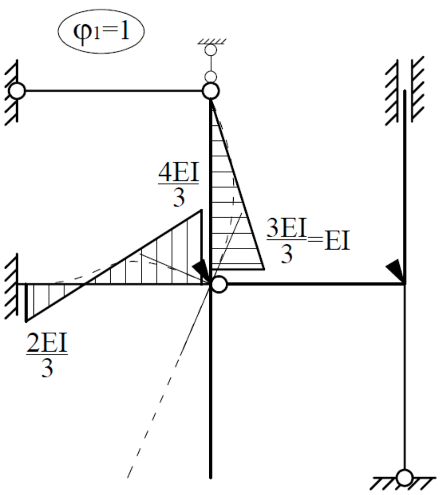
$n_g=3(\varphi_1, \varphi_2, \Delta_3)$

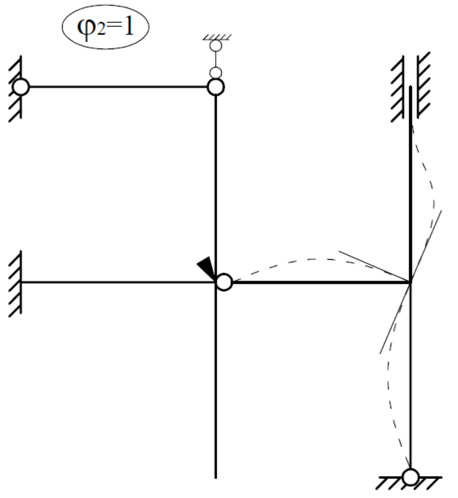
Na rysunku pokazano również na jakie elementy podzielony został schemat ramy. Elementy te są statycznie niewyznaczalne (pręty obustronnie utwierdzone, pręty utwierdzone z jednej strony i podparte przegubowo z drugiej) oraz statycznie wyznaczalne (pręty swobodnie podparte, wsporniki).

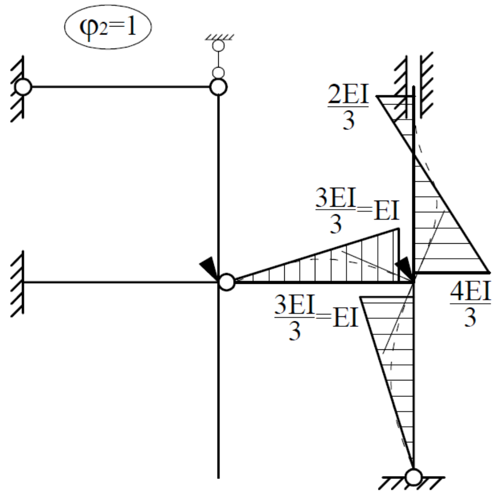


Na schemacie podstawowym wykonujemy wymuszenie jednostkowego obrotu zgodnego ze wskazówkami zegara w węzłach, w którym jest blokada obrotu (φ_1, φ_2). Na prętach, które uległy deformacji (statycznnie niewyznaczalnych), rysujemy wykres momentów po stronie włókien rozciąganych (na podstawie tablic). Pamiętajmy o tym, że w przegubach nie ma momentu!

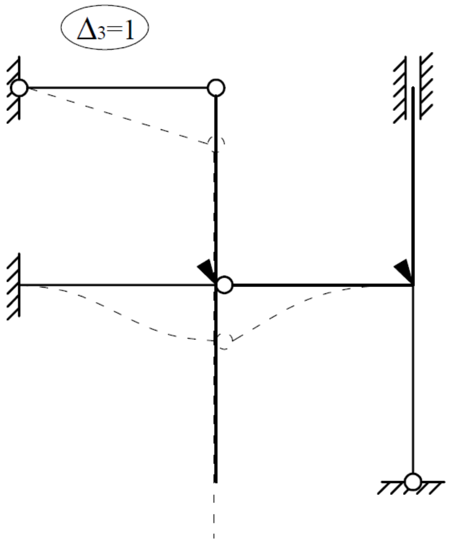


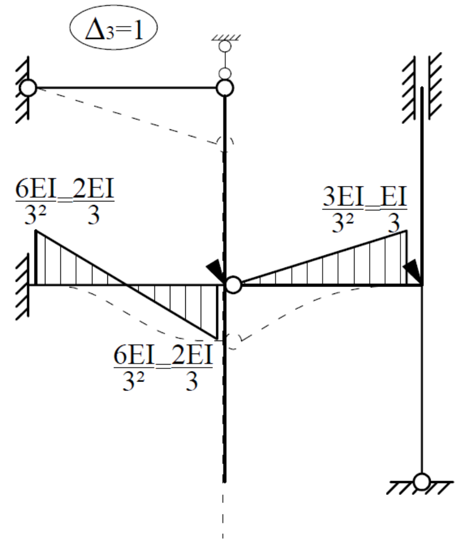




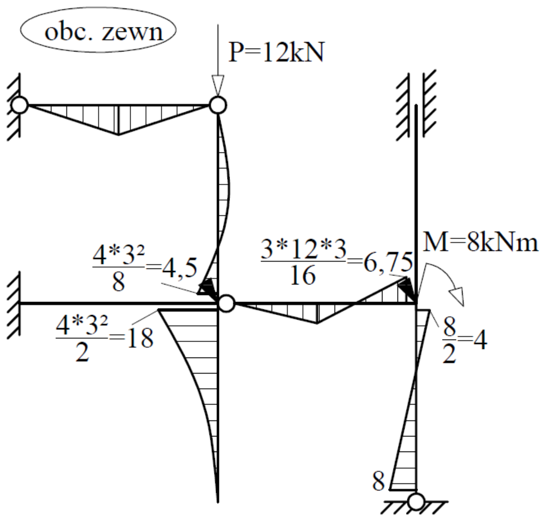


Następnie wykonujemy wymuszenie jednostkowego przesuwu pręta (Δ_3) na kieunku blokady przesuwu (w tym przykładzie w dół lub do góry). Na prętach, które uległy deformacji (statycznnie niewyznaczalnych), rysujemy wykres momentów po stronie włókien rozciąganych (na podstawie tablic). Pamiętajmy o tym, że w przegubach nie ma momentu!





Na schemacie podstawowym rysujemy wykresy od przęsłowych obciążeń zewnętrznych. Jeżeli element jest statycznie niewyznaczalny, wykresy rysujemy na podstawie tablic. Elementy statycznie wyznaczalne (swobodnie podparte, wsporniki) rozwiązujemy zgodnie z zasadami mechaniki ogólnej i wytrzymałości materiałów. Przy przegubach nie ma momentu, o ile nie jest przyłożony przy nich moment skupiony.



Węzłowe obciążenia zewnętrzne, czyli momenty przyłożone w miejscu blokady obrotu oraz siły skupione przyłozone na kierunku blokady przesuwu, nie dają wykresu momentów na schemacie podstawowym. Należy jednak uwzględnić je w dalszych obliczeniach, a ich wpływ będzie widoczny na wykresie końcowym.

Wyznaczamy współczynniki równań kanonicznych metody przemieszczeń. Współczynnik k_{ij} stanowi sumę momentów w węźle z blokadą obrotu (i) na schemacie od wymuszenia lub obciążenia (j) lub sumę reakcji otrzymaną na podstawie wykresu momentów (i) w blokadzie przesuwu (j).

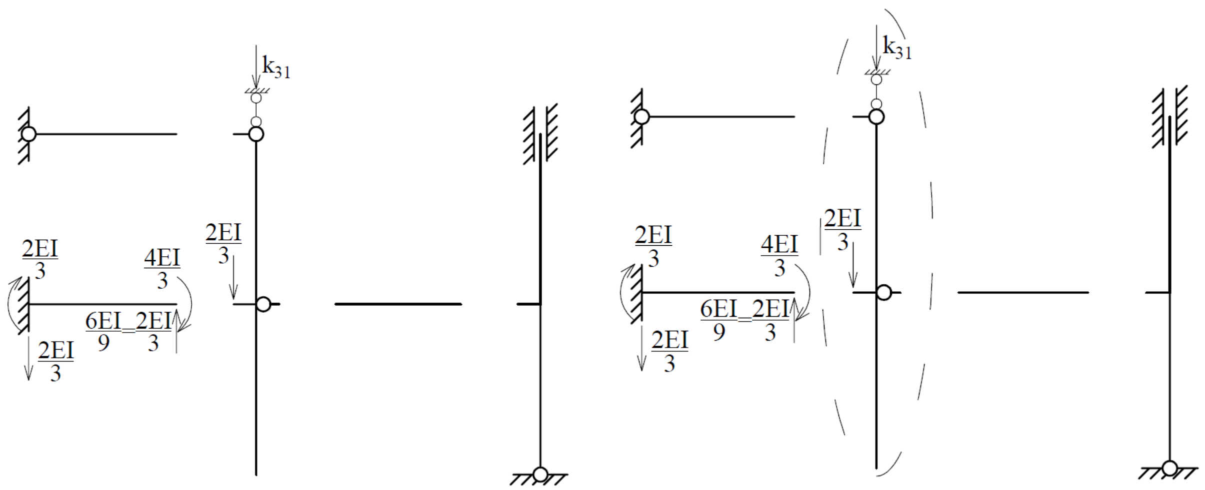
Należy pamiętać o tym, że współczynniki z indeksami $i = j$ muszą być dodatnie (nieujemne, niezerowe)! $k_{ii} > 0$

Współczynniki k_{1j} i k_{2j} dotyczą blokad obrotu, sumujemy zatem wartosci momentów przy węzłach (i) z kolejnych wykresów (j). Wartość momentu uznajemy za dodantnią, jeżeli względem końca pręta działa zgodnie ze wskazówkami zegara lub na węzeł działa przeciwnie do wskazówek zegara. Jeśli w węźle z blokadą obrotu działa moment węzłowy, uznajemy ze dodatni ten, który działa przeciwnie do wskazówek zegara.

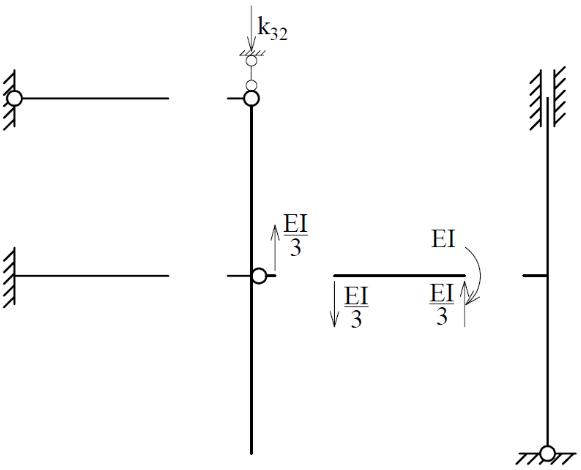
$k_{11} = \frac{4\mathrm{EI}}{3} + \mathrm{EI} = \frac{7\mathrm{EI}}{3} > 0$
$k_{12} = 0$
$k_{13} = -\frac{2\mathrm{EI}}{3}$
$k_{10} = 18 - 4{,}5 = 13{,}5$

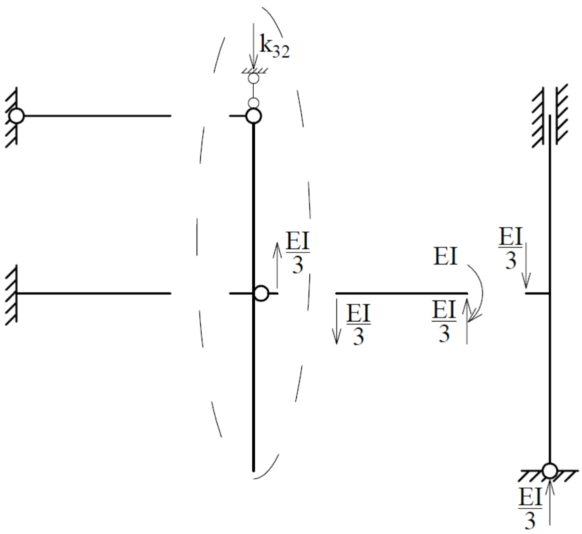
$k_{21} = 0 = k_{12}$
$k_{22} = \mathrm{EI} + \mathrm{EI} + \frac{4\mathrm{EI}}{3} = \frac{10\mathrm{EI}}{3} > 0$
$k_{23} = \frac{\mathrm{EI}}{3}$
$k_{20} = 6{,}75 - 4 - 8 = -5{,}25$

Współczynniki k_{3j} dotyczą blokady przesuwu. Aby wyznaczyć ich wartości rozcinamy układ w taki sposób, że odcinamy elementy połączone z prętem, który uległ przesunięciu. Na końce odciętych elementów nanosimy momenty z odpowiednich wykresów (j). Jeżeli dotyczy to wykresu od obciążeń zewnętrznych, nanosimy również obciążenia na te odcięte elementy. Następnie szukamy sił tnących na końcach tych prętów z warunków równowagi (ΣMi=0, ΣPi=0). Siły z końców prętów przekazujemy na węzły (pręty z węzłami). Jeżeli w układzie występuje siła węzłowa, nanosimy ją w odpowiednim węźle. Wartość współczynnika k_{3j} wynika z równowagi wyciętego elementu, który ulegał przesunięciu.

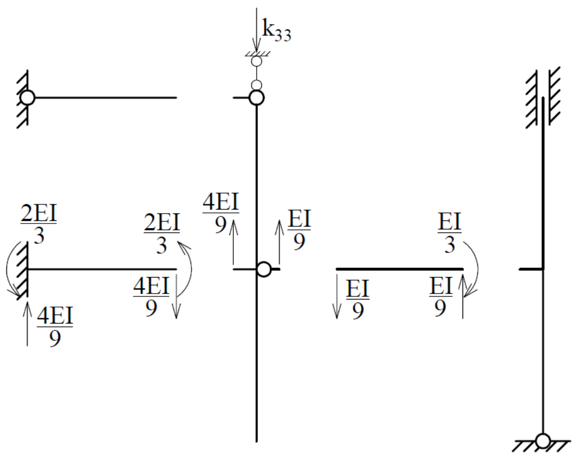


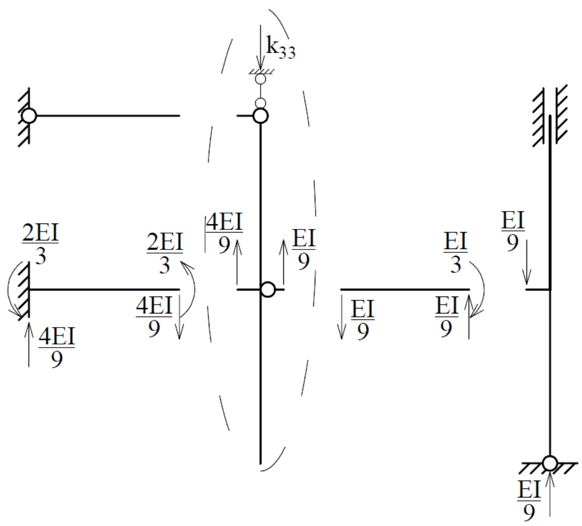
$-k_{31} - \frac{2\mathrm{EI}}{3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k_{31} = -\frac{2\mathrm{EI}}{3} = k_{13}$



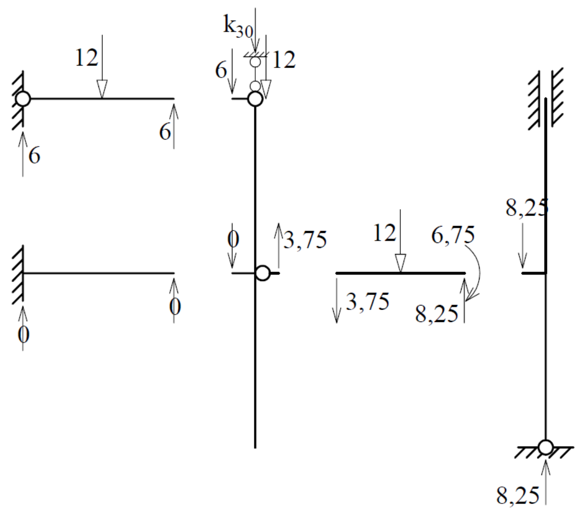


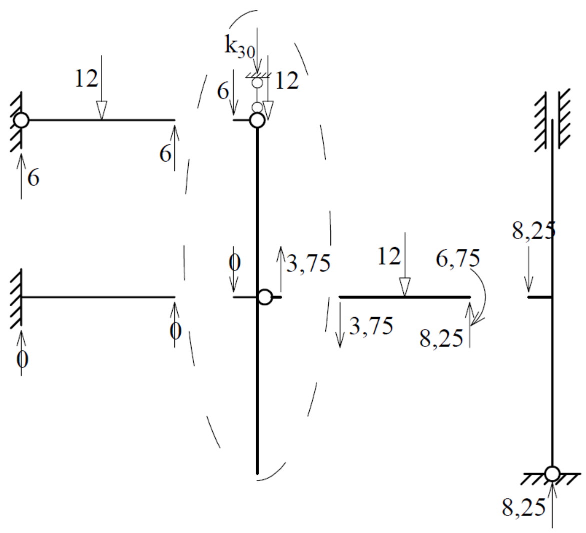
$-k_{32} + \frac{\mathrm{EI}}{3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k_{32} = \frac{\mathrm{EI}}{3} = k_{23}$





$-k_{33} + \frac{4\mathrm{EI}}{9} + \frac{\mathrm{EI}}{9} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k_{33} = \frac{4\mathrm{EI}}{9} + \frac{\mathrm{EI}}{9} = \frac{5\mathrm{EI}}{9} > 0$





$-k_{30} - 6 - 12 - 3{,}75 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k_{30} = -6 - 12 - 3{,}75 = -21{,}75$

Rozwiązujemy układ równań kanonicznych

$$\begin{cases} k_{11}\varphi_1 + k_{12}\varphi_2 + k_{13}\Delta_3 + k_{10} = 0 \\ k_{21}\varphi_1 + k_{22}\varphi_2 + k_{23}\Delta_3 + k_{20} = 0 \\ k_{31}\varphi_1 + k_{32}\varphi_2 + k_{33}\Delta_3 + k_{30} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7EI}{3}\varphi_1 + 0\,\varphi_2 - \frac{2EI}{3}\Delta_3 + 13{,}5 = 0 \\ 0\,\varphi_1 + \frac{10EI}{3}\varphi_2 + \frac{EI}{3}\Delta_3 - 5{,}25 = 0 \\ -\frac{2EI}{3}\varphi_1 + \frac{EI}{3}\varphi_2 + \frac{5EI}{9}\Delta_3 - 21{,}75 = 0 \end{cases}$$

Układ równań można również zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \frac{7EI}{3} & 0 & -\frac{2EI}{3} \\ 0 & \frac{10EI}{3} & \frac{EI}{3} \\ -\frac{2EI}{3} & \frac{EI}{3} & \frac{5EI}{9} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13{,}5 \\ 5{,}25 \\ 21{,}75 \end{bmatrix}$$

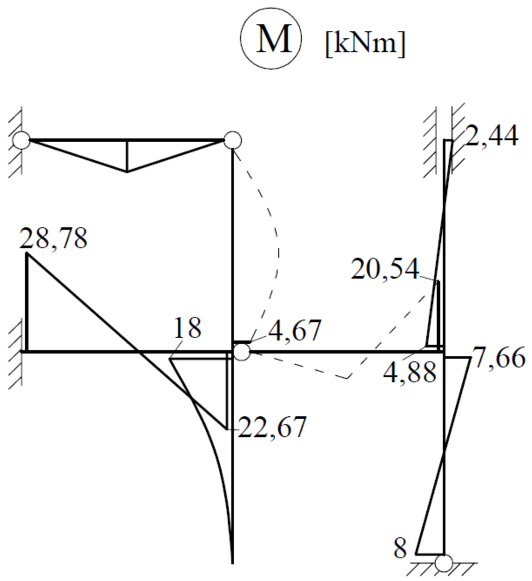
$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \Delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7EI}{3} & 0 & -\frac{2EI}{3} \\ 0 & \frac{10EI}{3} & \frac{EI}{3} \\ -\frac{2EI}{3} & \frac{EI}{3} & \frac{5EI}{9} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -13{,}5 \\ 5{,}25 \\ 21{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9{,}172}{EI} \\ \frac{-3{,}660}{EI} \\ \frac{52{,}353}{EI} \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem układu równań są rzeczywiste wartosci kątów obrotu w zablokowanych węzłach oraz przesunięcia zablokowanego kierunku

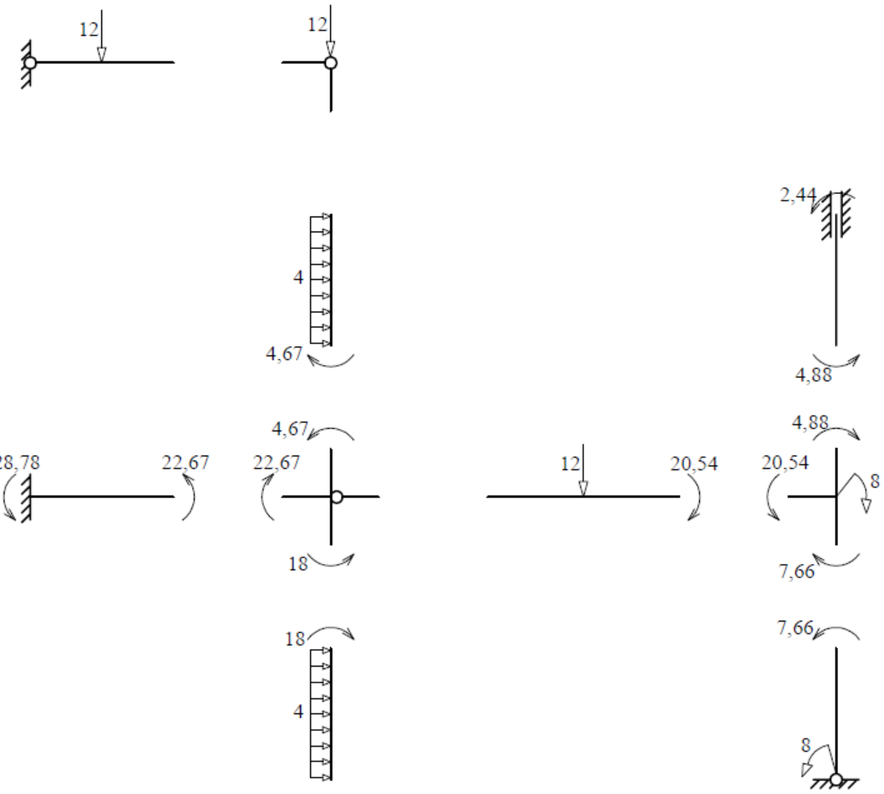
$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{9{,}172}{EI} \\ \varphi_2 = \frac{-3{,}660}{EI} \\ \Delta_3 = \frac{52{,}353}{EI} \end{cases}$$

Ostatecznie wykres momentów zginających sporządzamy poprzez dodanie do siebie wykresów na schemacie podstawowym, korzystajac z równania
$M = M_{\varphi_1} \cdot \varphi_1 + M_{\varphi_2} \cdot \varphi_2 + M_{\Delta_3} \cdot \Delta_3 + M_{obc.zewn.}$

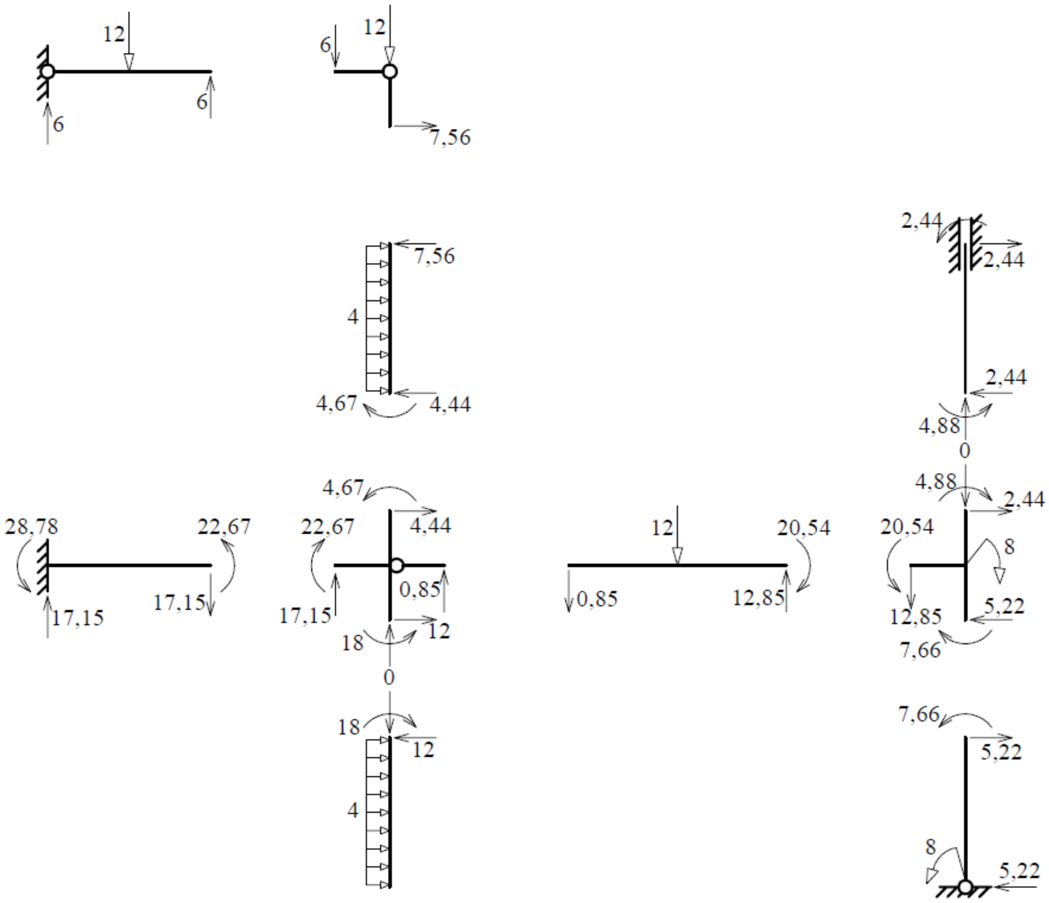
W pierwszej kolejności dodajemy do siebie wartości momentów przywęzłowych (także przypodporowych). Kształt wykresu musi uwzględniać wpływ obciążeń (załamanie pod siłą skupioną, skok w miejscu momentu skupionego, parabola pod obciążeniem rozłożonym).



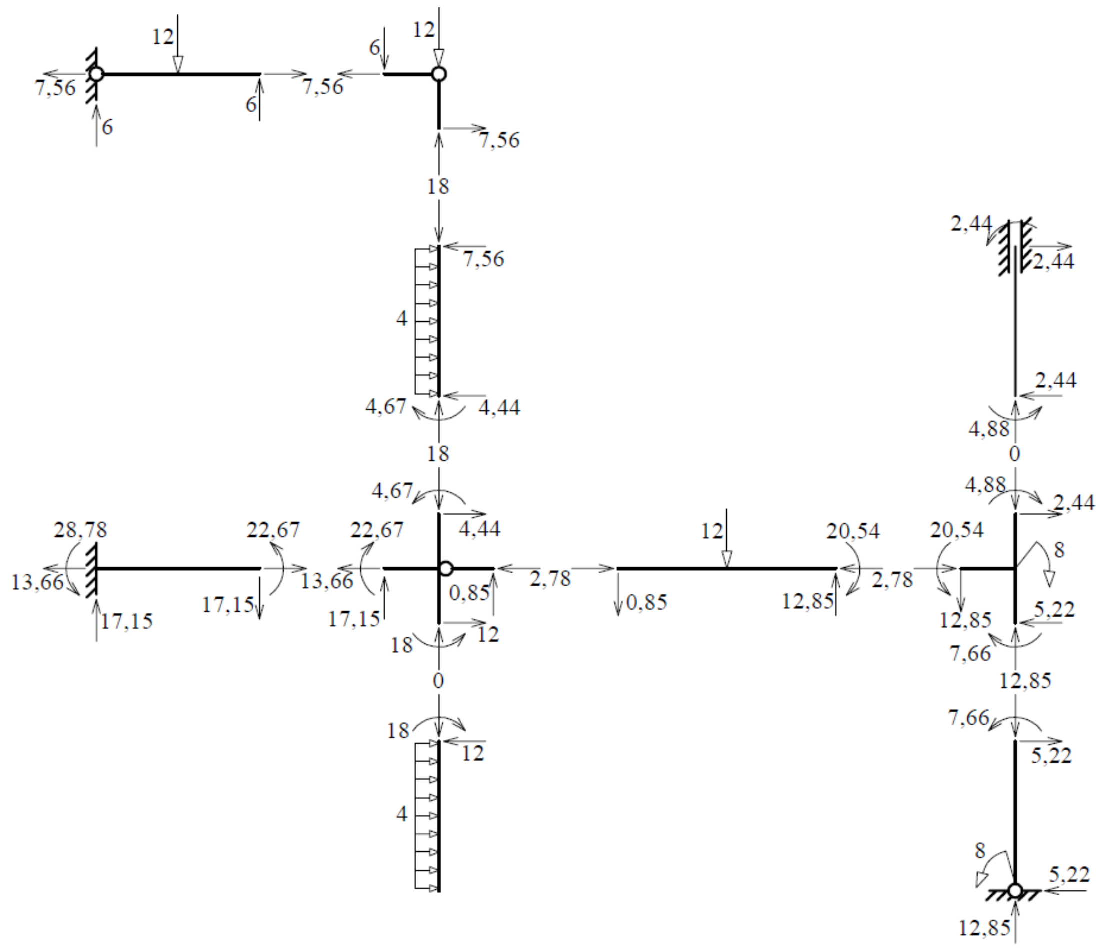
Aby uzyskać wartości momentów w środku prętów (np. pod siłą skupioną, ekstremum paraboli) oraz narysować wykresy sił tnacych i normalnych, dzielimy ramę na pręty i wolne węzły. Przenosimy na pręty i węzły wszystkie obciążenia zewnętrzne, a na końce prętów nanosimy momenty z wykresu M. Sprawdzamy, czy w każdym węźle jest zachowana równowaga momentów ($\sum M = 0$).



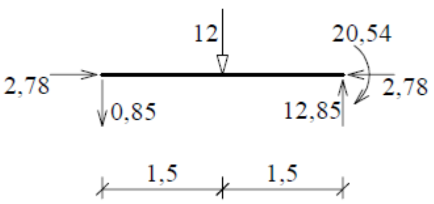
Z warunków równowagi dla każdego pręta ($\sum M = 0$, $\sum P_x = 0$, $\sum P_y = 0$) otrzymujemy wartości sił prostopadłych do prętów (tnących) na ich końcach:



Z równowagi węzłów ($\sum P_x = 0, \sum P_y = 0$) uzyskujemy wartości sił normalnych (wzdłuż osi prętów):

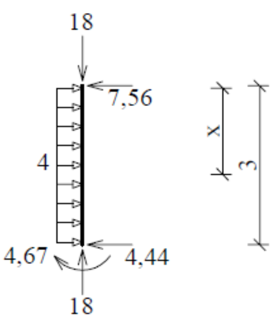


Wartość momentu zginającego pod siłą skupioną wyznaczamy z wyciętego pręta:



$$M_P = -0{,}85 \cdot 1{,}5 = -1{,}28 \text{ kNm}$$

Podobnie obliczamy ekstremum momentu zginającego:



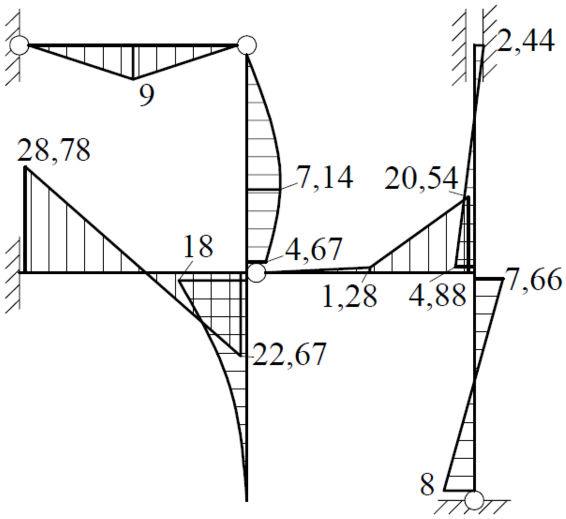
$$T(x) = -7{,}56 + 4x = 0$$

$$x = \frac{7{,}56}{4} = 1{,}89 \text{ m } < 3 \text{ m}$$

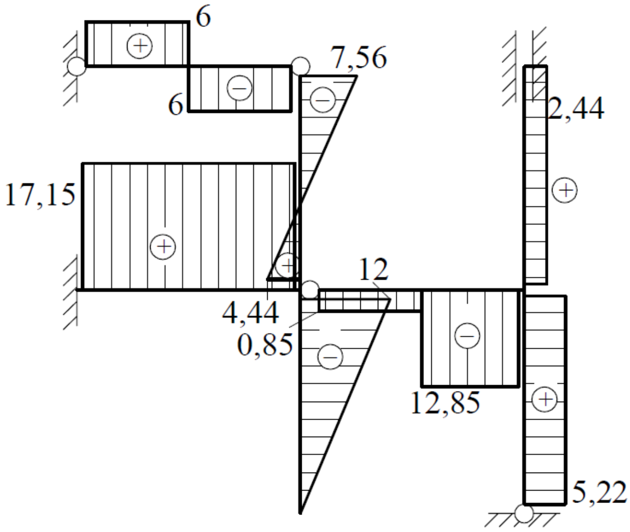
$$M_{max} = M(x) = 7{,}56x - 4\frac{x^2}{2} = 7{,}56 \cdot 1{,}89 - 4 \cdot \frac{1{,}89^2}{2} = 7{,}14 \text{ kNm}$$

Otrzymujemy ostateczne wykresy M, T i N dla ramy:

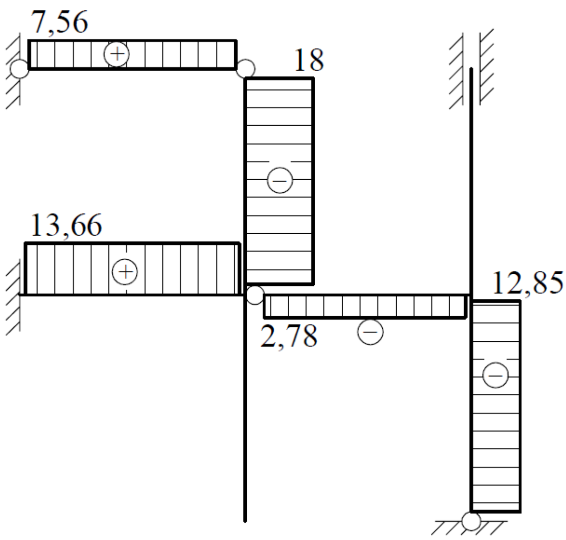
M [kNm]

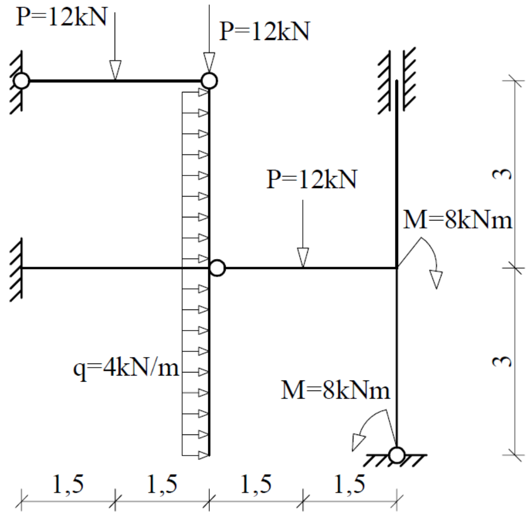


T [kN]



N [kN]

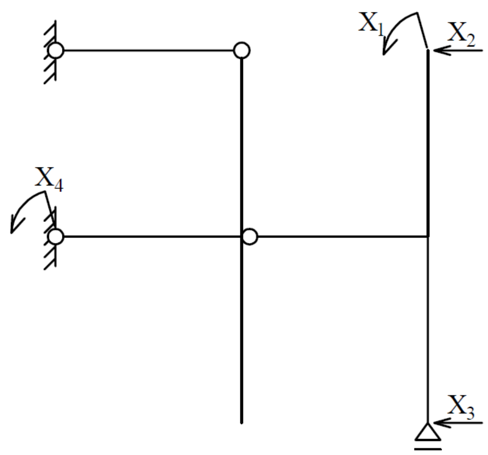




Aby wykonać sprawdzenie z twierdzenia redukcyjnego, należy obliczyć stopień statycznej niewyznaczalnosci ramy oraz przyjąć schemat podstawowy metody sił.

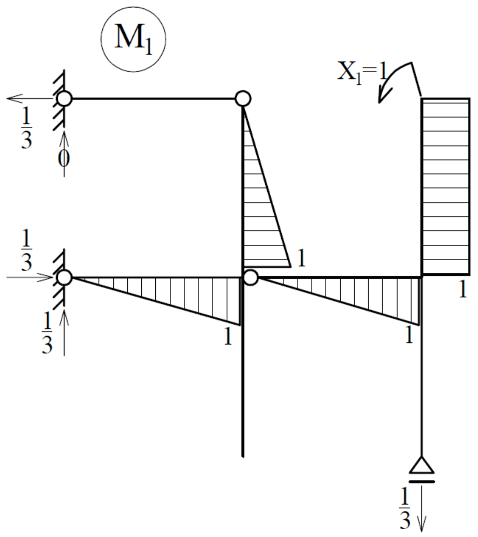
$$n_s = r - p - 3 = (2+3+2+2) - 2 - 3 = 4$$

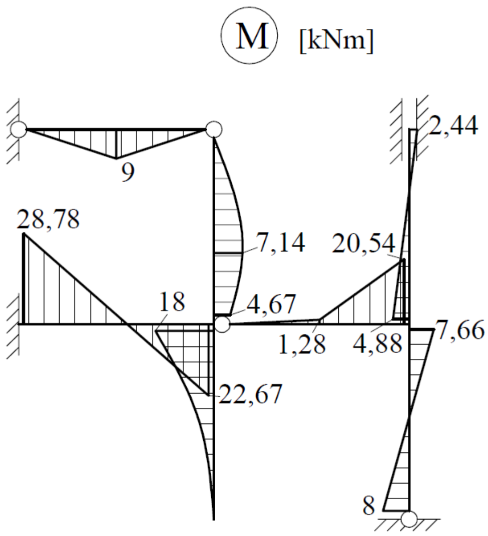
Przykładowy schemat podstawowy metody sił został przedstawiony na rysunku:



Sprawdzenie z twierdzenia redukcyjnego można wykonać następująco:

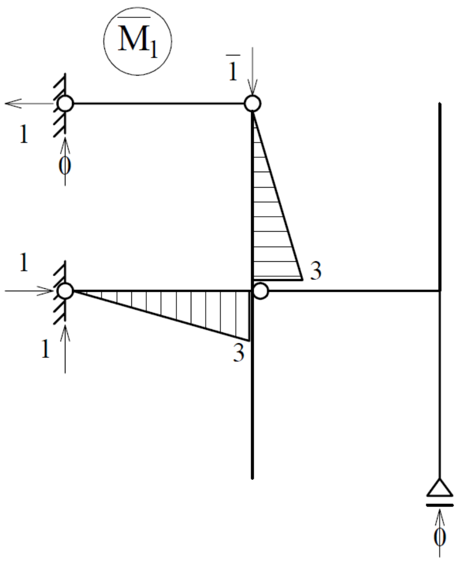
1. Sporządzić wykres od dowolnej nadliczbowej X_k i scałkować go z końcowym wykresem momentów. Wynik tego całkowania powinien wynosić zero.

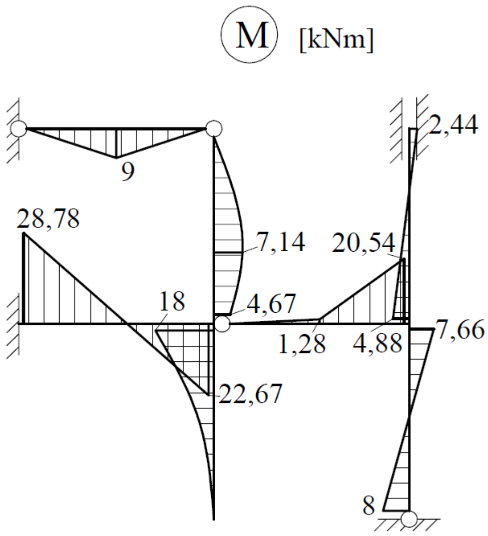




$$\int_L \frac{M_1 M}{EI} ds = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 22{,}67 - \frac{1}{3}\cdot 28{,}78\right) + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\cdot\frac{2}{3}\cdot 4{,}67 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4\cdot 3^2}{8}\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\right.$$
$$-\frac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5\cdot\frac{2}{3}\cdot 1{,}28 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 1{,}28 + \frac{1}{3}\cdot 20{,}54\right)$$
$$\left.-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1{,}5\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 1{,}28 + \frac{2}{3}\cdot 20{,}54\right) + 1\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2{,}44 - \frac{1}{2}\cdot 4{,}88\right)\right] = -\frac{3}{400EI} \cong 0$$

2. Sporządzić wykres od „jedynki” wirtualnej na kierunku blokady obrotu lub przesuwu z metody przemieszczeń i scałkować go z końcowym wykresem momentów. Wynik tego całkowania powinien być równy wartości kąta obrotu lub przesunięcia uzyskanej z układu równań metody przemieszczeń.





$$\int_L \frac{\overline{M_1}M}{EI}ds = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 22,67-\frac{1}{3}\cdot 28,78\right)+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\frac{2}{3}\cdot 4,67+\frac{2}{3}\cdot\frac{4\cdot 3^2}{8}\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\right]$$

$$=\frac{52,35}{EI}\cong\Delta_3$$