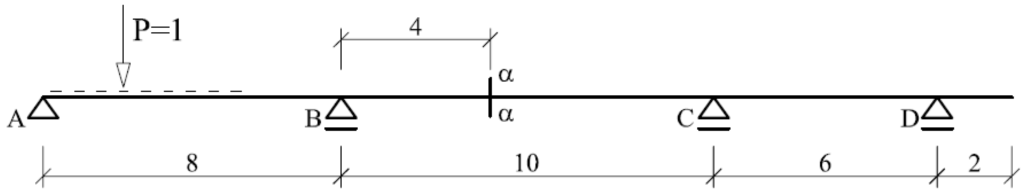
Zadanie 6

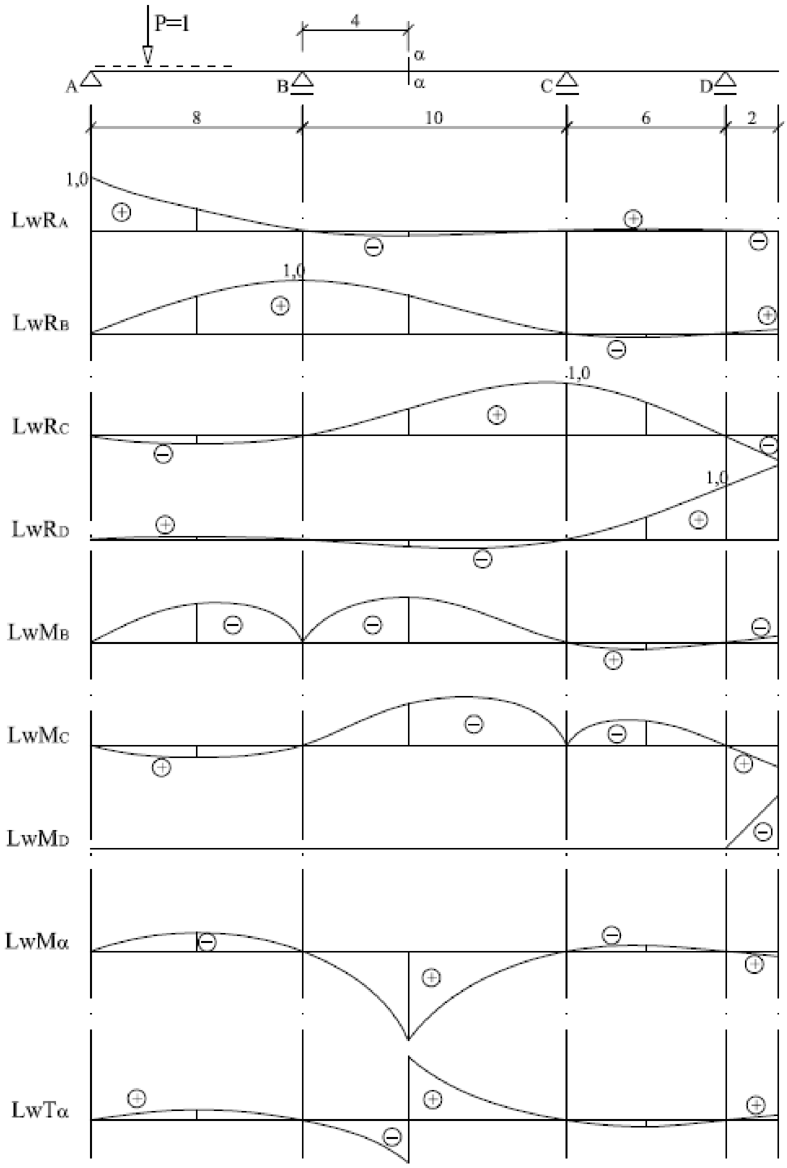
1. Narysować linie wpływu wszystkich reakcji i momentów podporowych oraz momentu i siły tnącej w przekroju α-α dla belki.
2. Obliczyć rzędne na wszystkich liniach wpływu w czterech punktach:
   1) w połowie długości przęsła A-B
   2) w przekroju α-α
   3) w połowie długości przęsła C-D
   4) na końcu wspornika
3. Wyznaczyć maksymalną reakcję podporową oraz maksymalny moment podporowy i przęsłowy dla belki od obciążenia użytkowego p=4kN/m. Obciążenie stałe pominąć.

W rozwiązaniu zadania zastosować metodę przemieszczeń.



Ad. 1.

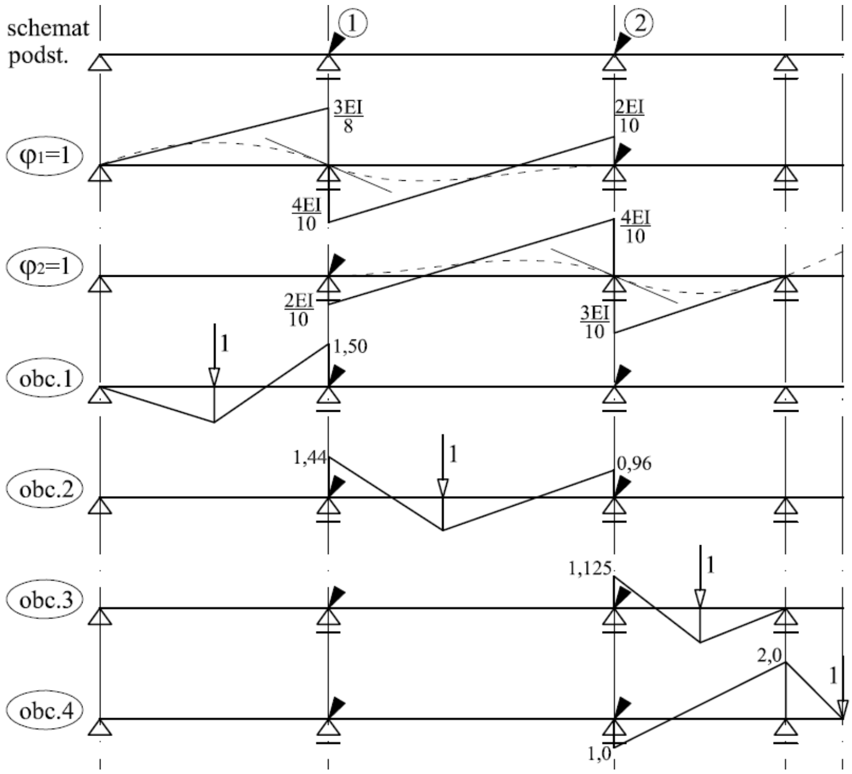
Szkicujemy zadane linie wpływu pamiętając, że linia wpływu reakcji jest równa 1 w miejscu podpory, której dotyczy, oraz 0 w pozostałych punktach podporowych. Linie wpływu momentów i sił tnących są równe 0 w miejscu wszystkich podpór.



Ad. 2.

Zakładamy schemat podstawowy metody przemieszczeń blokując środkowe podpory belki na obrót i otrzymujemy układ dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalny. Następnie wymuszamy obroty zablokowanych węzłów i otrzymujemy wykresy momentów zginających.
Jako obciążenie zewnętrzne zakładamy siłę skupioną o wartości jednostkowej i wstawiamy ją w czterech zadanych punktach:

1) w połowie długości przęsła A-B
2) w przekroju α-α
3) w połowie długości przęsła C-D
4) na końcu wspornika



Wyznaczamy współczynniki równania kanonicznego metody przemieszczeń. Współczynnik k_{ij} stanowi sumę momentów w węźle z blokadą obrotu (i) na wykresie (j). Współczynniki k_{i0} pochodzące od obciążeń zewnętrznych są różne dla każdego przypadku obciążenia i zostaną przedstawione w tabeli. Dla każdego przypadku rozwiązujemy układ równań kanonicznych (szukamy φ_1 i φ_2):

$$\begin{cases} k_{11}\varphi_1 + k_{12}\varphi_2 + k_{10} = 0 \\ k_{21}\varphi_1 + k_{22}\varphi_2 + k_{20} = 0 \end{cases}$$

$k_{11} = \frac{3}{8}\text{EI} + \frac{4}{10}\text{EI} = 0{,}775\ \text{EI}$ $\qquad$ $k_{21} = \frac{2}{10}\text{EI} = 0{,}2\ \text{EI}$

$k_{12} = \frac{2}{10}\text{EI} = 0{,}2\ \text{EI}$ $\qquad$ $k_{22} = \frac{4}{10}\text{EI} + \frac{3}{6}\text{EI} = 0{,}9\ \text{EI}$

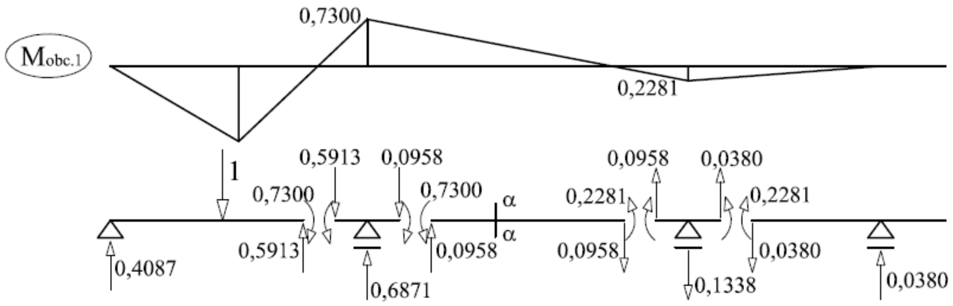
	obc.1	obc.2	obc.3	obc.4
k_{10}	1,50	–1,44	0	0
k_{20}	0	0,96	–1,125	1,0
φ_1	–2,05323	2,26312	–0,34221	0,30418
φ_2	0,45627	–1,56958	1,32605	–1,17871

Wykresy momentów zginających dla rozpatrywanych przypadków sporządzamy poprzez nałożenie na siebie wykresów na schemacie podstawowym, korzystajac z równania

$M = M_{\varphi_1} \cdot \varphi_1 + M_{\varphi_2} \cdot \varphi_2 + M_{obc.}$

Następnie rozcinamy belkę, dzieląc ją na elementy, w celu wyznaczenia szukanych reakcji, sił tnących i momentów.

1) Środek przęsła A-B

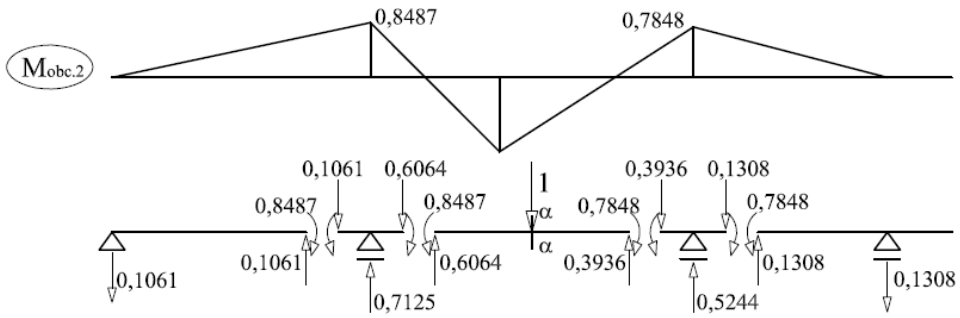


$R_A = 0{,}4087\ kN$ $R_B = 0{,}6871\ kN$ $R_C = -0{,}1338\ kN$ $R_D = 0{,}0380\ kN$

$M_A = 0$ $M_B = -0{,}7300\ kNm$ $M_C = 0{,}2281\ kNm$ $M_D = 0$

$T_\alpha = 0{,}0958\ kN$ $M_\alpha = 0{,}0958 \cdot 4 - 0{,}7300 = -0{,}3468\ kNm$

2) Przekrój α-α



$R_A = -0{,}1061\ kN$ $R_B = 0{,}7125\ kN$ $R_C = 0{,}5244\ kN$ $R_D = -0{,}1308\ kN$

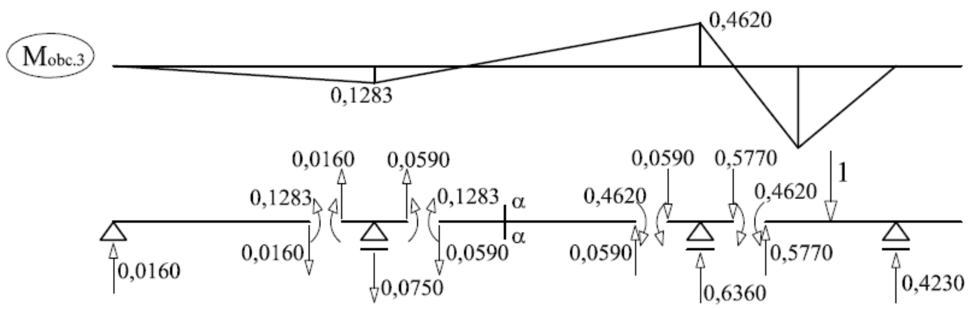
$M_A = 0$ $M_B = -0{,}8487\ kNm$ $M_C = -0{,}7848\ kNm$ $M_D = 0$

$T_\alpha{}^L = 0{,}6064 - 1{,}0 = 0{,}3936\ kN$ (gdy siła znajduje się z lewej strony przekroju α-α)

$T_\alpha{}^P = 0{,}6064\ kN$ (gdy siła znajduje się z prawej strony przekroju α-α)

$M_\alpha = 0{,}6064 \cdot 4 - 0{,}8487 = 1{,}5769\ kNm$

3) Środek przęsła C-D

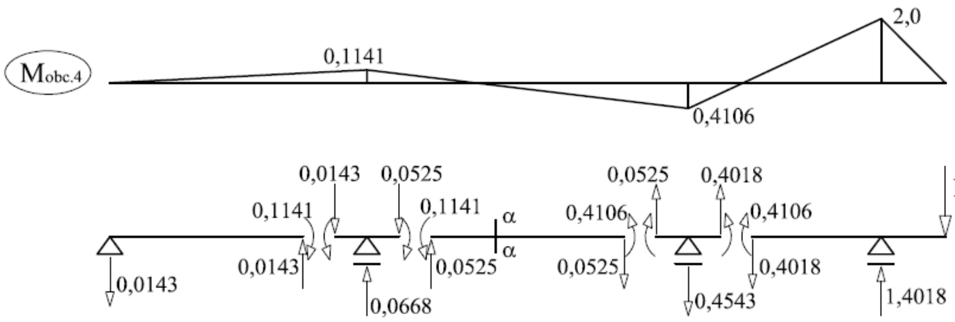


$R_A = 0{,}0160\ kN$ $R_B = -0{,}0750\ kN$ $R_C = 0{,}6360\ kN$ $R_D = 0{,}4230\ kN$

$M_A = 0$ $M_B = 0{,}1283\ kNm$ $M_C = -0{,}4620\ kNm$ $M_D = 0$

$T_\alpha = -0{,}0590\ kN$ $M_\alpha = -0{,}0590 \cdot 4 + 0{,}1283 = -0{,}1077\ kNm$

4) Koniec wspornika

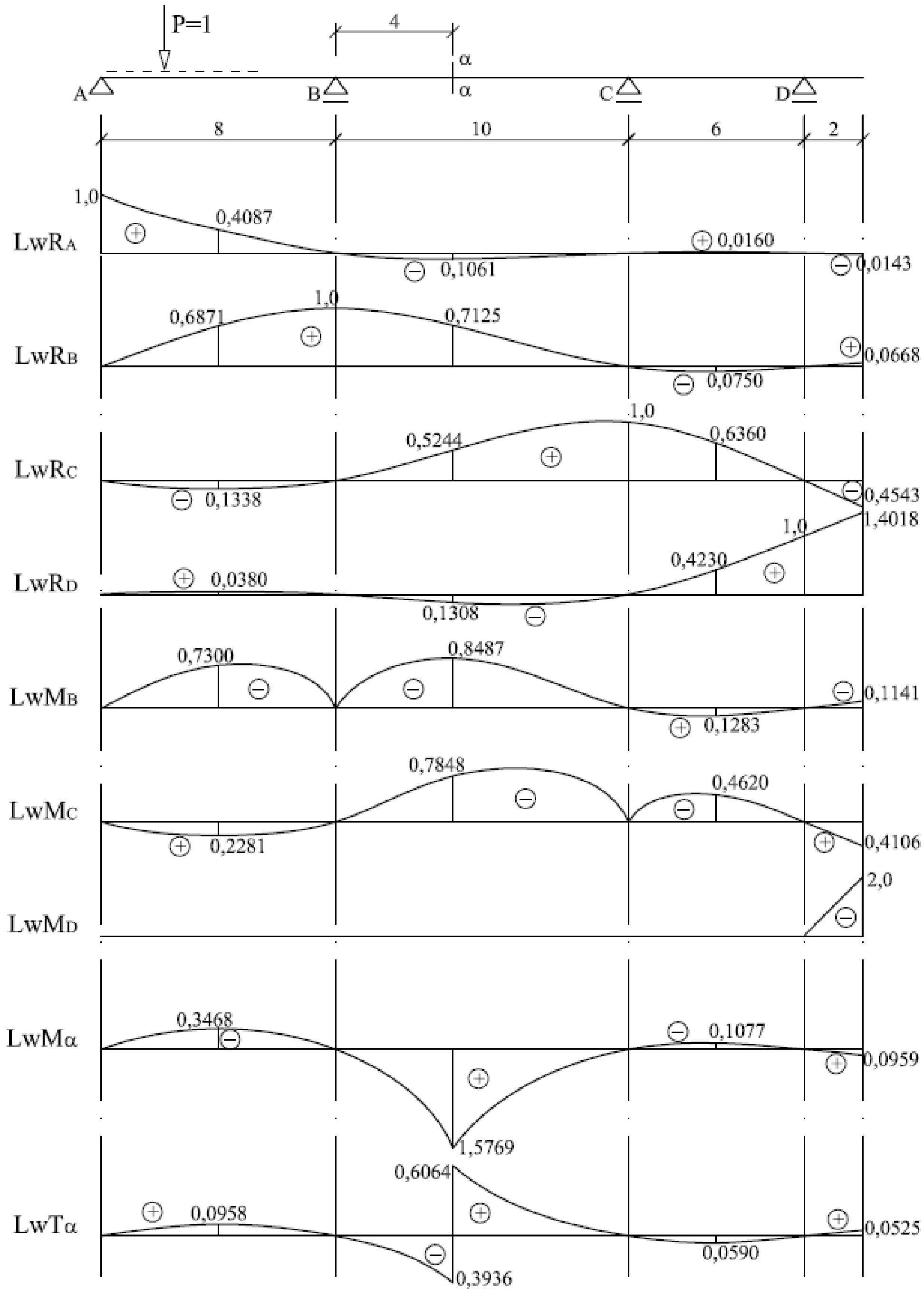


$R_A = -0{,}0143$ kN $\quad R_B = 0{,}0668$ kN $\quad R_C = -0{,}4543$ kN $\quad R_D = 1{,}4018$ kN

$M_A = 0 \quad M_B = -0{,}1141$ kNm $\quad M_C = 0{,}4106$ kNm $\quad M_D = -2{,}0$ kNm

$T_\alpha = 0{,}0525$ kN $\quad M_\alpha = 0{,}0525 \cdot 4 - 0{,}1141 = 0{,}0959$ kNm

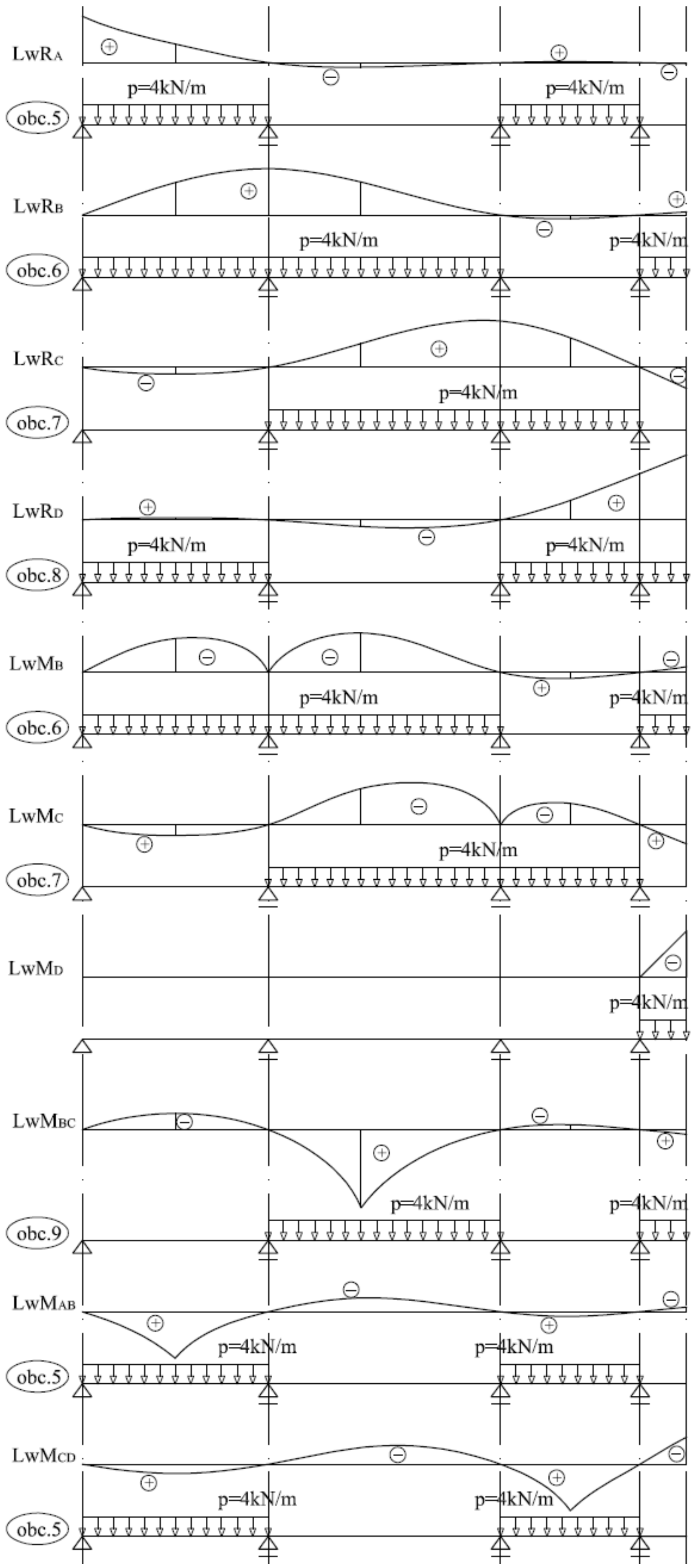
Uzupełniamy linie wpływu obliczonymi wartościami



Ad. 3.

W celu wyznaczenia największej wartości reakcji podporowej, ustawiamy na belce obciążenie użytkowe tam, gdzie linia wpływu reakcji jest dodatnia. Aby wyznaczyć maksymalny moment podporowy, obciążenie użytkowe umieszczamy tam, gdzie linia wpływu danego momentu jest ujemna. Maksymalny moment przęsłowy uzyskamy obciążając belkę tam, gdzie linia wpływu momentu jest dodatnia.

Dla przęseł A-B i C-D szkicujemy prawdopodone linie wpływu momentu dla przekroju w środku przęsła.



Otrzymujemy kilka ustawień obciążenia użytkowego, które powodują ekstremalne wartości:

Obc.5) R_{Amax} , M_{ABmax} , M_{CDmax}

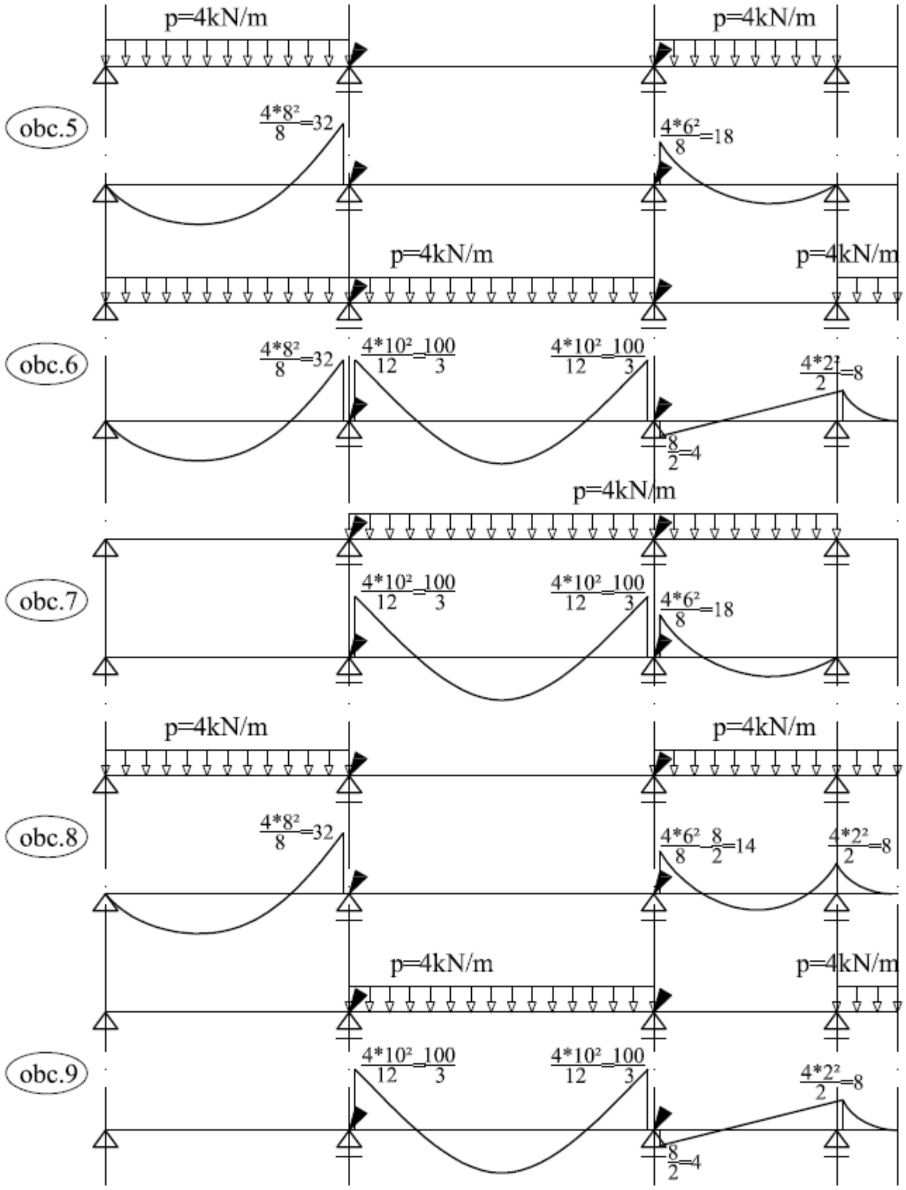
Obc.6) R_{Bmax} , M_{Bmax} , M_{Dmax}

Obc.7) R_{Cmax} , M_{Cmax}

Obc.8) R_{Dmax}

Obc.9) M_{BCmax}

Na tym samym schemacie podstawowym (Ad. 2) ustawiamy obciążenie użytkowe

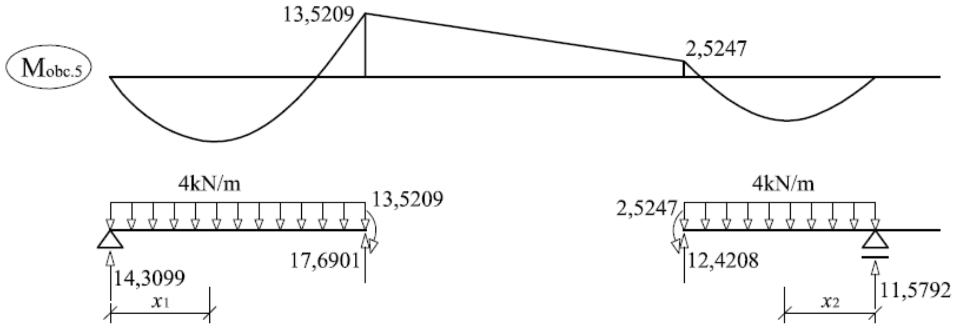


Obliczamy współczynniki k_{i0}, które zapisujemy w tabeli i rozwiązujemy układ równań (jak w Ad. 2, współczynniki k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22} są takie same jak w Ad. 2).

	obc.5	obc.6	obc.7	obc.8	obc.9
k_{10}	32	$32-\frac{100}{3}=-\frac{4}{3}$	$-\frac{100}{3}$	32	$-\frac{100}{3}$
k_{20}	-18	$\frac{100}{3}+4=\frac{112}{3}$	$\frac{100}{3}-18=\frac{46}{3}$	-14	$\frac{100}{3}+4=\frac{112}{3}$
φ_1	$-49,27757$	$13,18124$	$50,29151$	$-48,06084$	$56,98352$
φ_2	$30,95057$	$-44,41065$	$-28,21293$	$26,23574$	$-54,14449$

Rysujemy wykresy momentów zginających dla poszczególnych przypadków i dzielimy belkę na elementy, aby wyznaczyć szukane wartości ekstremalne.

Obc.5)



$R_{Amax} = 14{,}3099$ kN

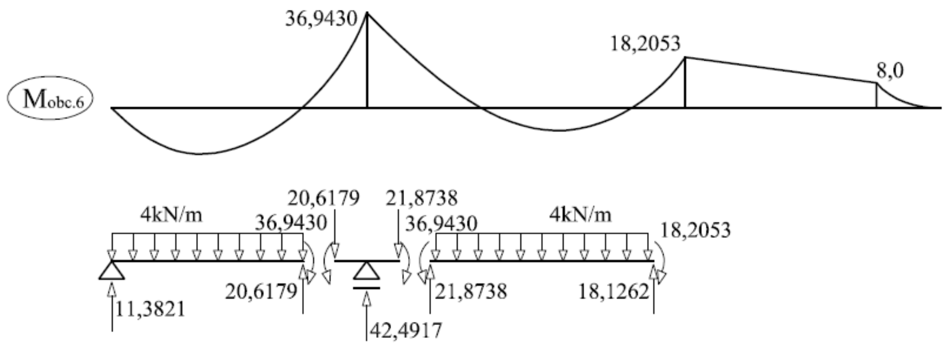
$T(x_1) = 14{,}3099 - 4 \cdot x_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 3{,}5775$ m

$M_{ABmax} = M(x_1) = 14{,}3099 \cdot 3{,}5775 - 4 \cdot \frac{3{,}5775^2}{2} = 25{,}5967$ kNm

$T(x_2) = -11{,}5792 + 4 \cdot x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 2{,}8948$ m

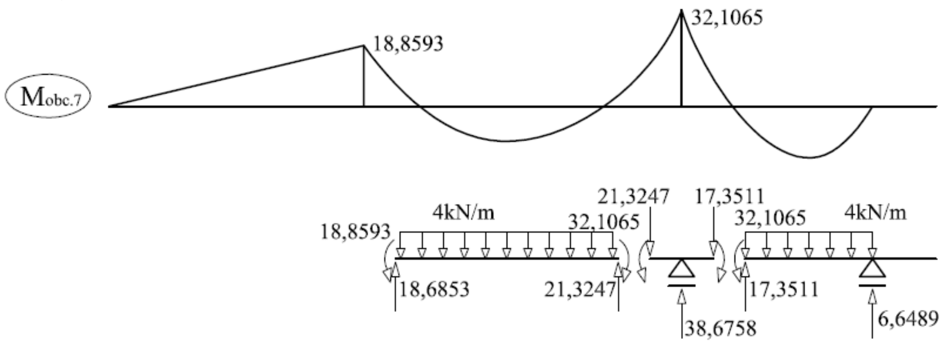
$M_{CDmax} = M(x_2) = 11{,}5791 \cdot 2{,}8948 - 4 \cdot \frac{2{,}8948^2}{2} = 16{,}7598$ kNm

Obc.6)



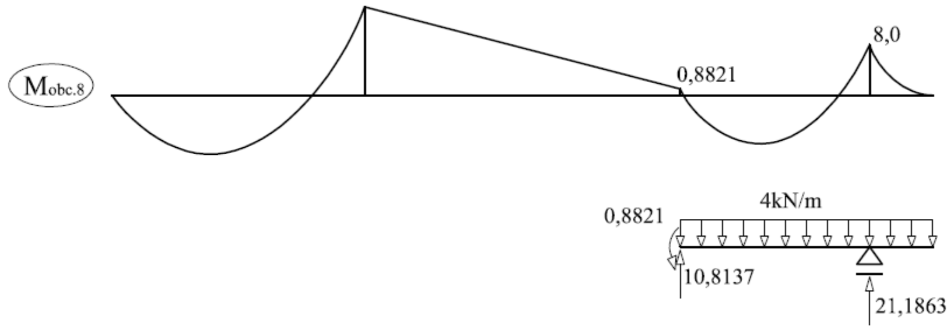
$R_{Bmax} = 42{,}4917$ kN
$M_{Bmax} = -36{,}9430$ kNm
$M_{Dmax} = -8{,}0$ kNm

Obc.7)



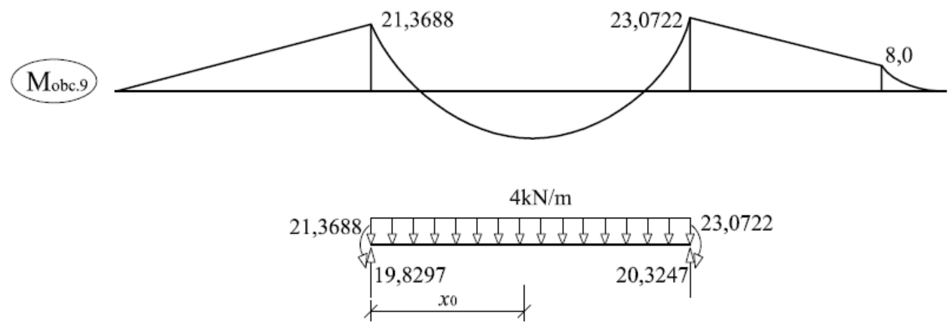
$R_{Cmax} = 38{,}6758$ kN
$M_{Cmax} = -32{,}1065$ kNm

Obc.8)



$R_{Dmax} = 21{,}1863$ kN

Obc.9)



$T(x_0) = 19{,}8297 - 4 \cdot x_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = 4{,}9574$ m

$M_{BCmax} = M(x_0) = -21{,}3688 + 19{,}8297 \cdot 4{,}9574 - 4 \cdot \frac{4{,}9574^2}{2} = 27{,}7834$ kNm

W podporze B otrzymujemy największą wartość reakcji oraz momentu podporowego. Maksymalny moment przęsłowy uzyskujmy w przęśle BC (w odległości $x_0 = 4{,}9574$ m od podpory B).

$R_{max} = R_{Bmax} = 42{,}4917$ kN.

$M_{max}^{podp.} = M_{Bmax} = -36{,}9430$ kNm

$M_{max}^{przęsł.} = M_{BCmax} = 27{,}7834$ kNm