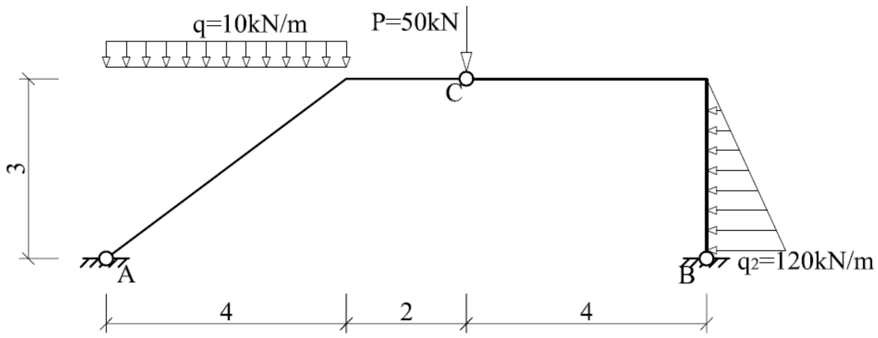
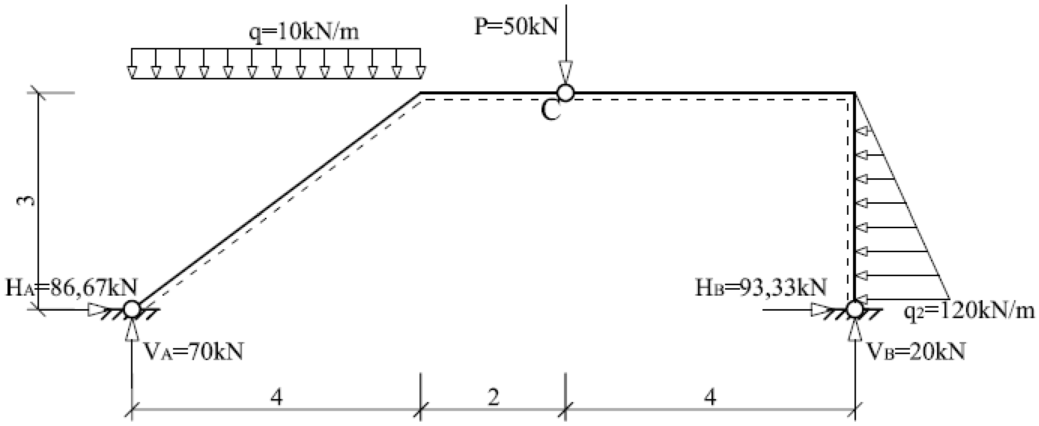
Przykład 3

Sporządzić wykresy sił normalnych, tnących i momentów zginających w ramie.



Rozwiązanie:

Zakładamy reakcje w podporach ramy i obliczamy ich wartości z równań równowagi.



$$\sum m_{\mathrm{A}} = -\mathrm{q}\cdot 4\cdot 2 - \mathrm{P}\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{q}_2\cdot 3\cdot 1 + \mathrm{V}_{\mathrm{B}}\cdot 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{V}_{\mathrm{B}} = \frac{1}{10}\left(10\cdot 4\cdot 2 + 50\cdot 6 - \frac{1}{2}\cdot 120\cdot 3\cdot 1\right) = 20\ \mathrm{kN}$$

$$\sum m_{\mathrm{B}} = \mathrm{q}\cdot 4\cdot 8 + \mathrm{P}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{q}_2\cdot 3\cdot 1 - \mathrm{V}_{\mathrm{B}}\cdot 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{V}_{\mathrm{A}} = \frac{1}{10}\left(10\cdot 4\cdot 8 + 50\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 120\cdot 3\cdot 1\right) = 70\ \mathrm{kN}$$

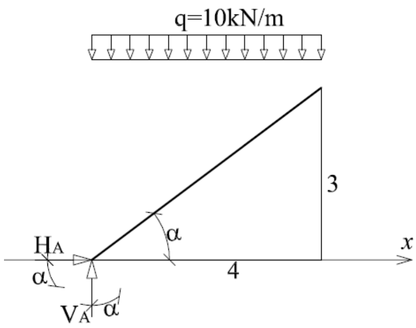
$$\sum m_{\mathrm{C}}^{L} = \mathrm{q}\cdot 4\cdot 4 + \mathrm{H}_{\mathrm{A}}\cdot 3 - \mathrm{V}_{\mathrm{A}}\cdot 6 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{H}_{\mathrm{A}} = \frac{1}{3}(-10\cdot 4\cdot 4 + 70\cdot 6) = \frac{260}{3} = 86{,}67\ \mathrm{kN}$$

$$\sum m_{\mathrm{C}}^{P} = -\frac{1}{2}\cdot \mathrm{q}_2\cdot 3\cdot 2 + \mathrm{H}_{\mathrm{B}}\cdot 3 + \mathrm{V}_{\mathrm{B}}\cdot 4 = 0 \ \Rightarrow \ \mathrm{H}_{\mathrm{B}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 120\cdot 3\cdot 2 - 20\cdot 4\right) = \frac{280}{3} = 93{,}33\ \mathrm{kN}$$

Sprawdzenie:

$$\sum r_y = \mathrm{V}_{\mathrm{A}} - \mathrm{q}\cdot 4 - \mathrm{P} + \mathrm{V}_{\mathrm{B}} = 70 - 10\cdot 4 - 50 + 20 = 0$$

$$\sum r_x = \mathrm{H}_{\mathrm{A}} + \mathrm{H}_{\mathrm{B}} - \frac{1}{2}\cdot \mathrm{q}_2\cdot 3 = 86{,}67 + 93{,}33 - \frac{1}{2}\cdot 120\cdot 3 = 0$$

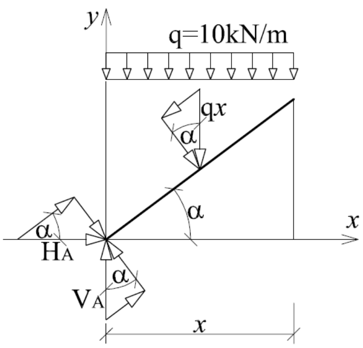


Zakładamy, że pręt ukośny jest nachylony do poziomu pod katem α. Funkcje trygonometryczne dla tego kata są:

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$



Aby sporządzić wykresy normalnych i tnących, siły działające na pręt ukośny zamieniamy na składowe prostopadłe i równoległe do pręta. Zapisujemy równania na siły wewnętrzne dla dowolnego przekroju w pręcie ukośnym, $\mathrm{q}\,x$ jest wypadkową obciążenia równomiernie rozłożonego, działającego na odciętą danym przekrojem część pręta.

$$\mathrm{N} = -\mathrm{V_A}\sin\alpha - \mathrm{H_A}\cos\alpha + \mathrm{q}\,x\sin\alpha$$
$$\mathrm{T} = \mathrm{V_A}\cos\alpha - \mathrm{H_A}\sin\alpha - \mathrm{q}\,x\cos\alpha$$

Równanie momentów zginających piszemy dla sił w pierwotnym układzie obciążenia (nie uwzględniamy składowych)

$$\mathrm{M} = \mathrm{V_A}\,x - \mathrm{H_A}\,y - \mathrm{q}\,x\,\frac{x}{2}, \qquad \text{gdzie } y = x\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}\,x$$

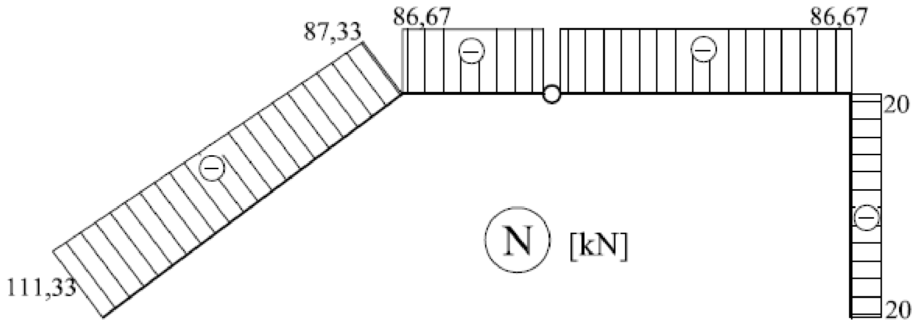
Otrzymujemy zatem wartości sił wewnętrznych na początku pręta (przy podporze A)

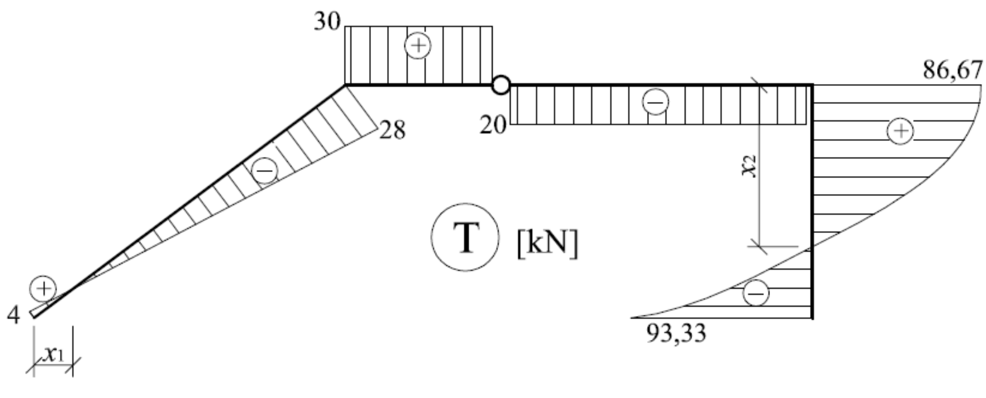
$$\mathrm{N} = -70\cdot\frac{3}{5} - \frac{260}{3}\cdot\frac{4}{5} + 10\cdot 0 = -\frac{334}{3} = -111{,}33\ \mathrm{kN}$$
$$\mathrm{T} = 70\cdot\frac{4}{5} - \frac{260}{3}\cdot\frac{3}{5} - 10\cdot 0 = 4\ \mathrm{kN}$$
$$\mathrm{M} = 0$$

oraz na końcu pręta (w węźle)

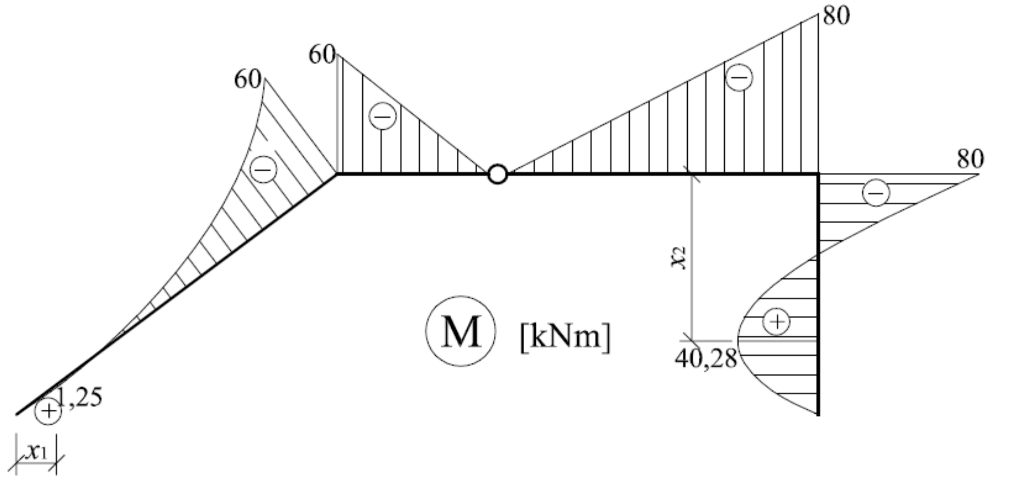
$$\mathrm{N} = -70\cdot\frac{3}{5} - \frac{260}{3}\cdot\frac{4}{5} + 10\cdot 4\cdot\frac{3}{5} = -\frac{262}{3} = -87{,}33\ \mathrm{kN}$$
$$\mathrm{T} = 70\cdot\frac{4}{5} - \frac{260}{3}\cdot\frac{3}{5} - 10\cdot 4\cdot\frac{4}{5} = -28\ \mathrm{kN}$$
$$\mathrm{M} = 70\cdot 4 - \frac{260}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot 4 - 10\cdot 4\cdot\frac{4}{2} = -60\ \mathrm{kNm}$$

Sporządzamy wykresy N, T, M





Wykres sił tnących na pręcie pionowym jest parabolą, ponieważ na pręt działa obciążenie trójkątne. W związku z tym wykres momentów zginających będzie parabolą trzeciego stopnia.

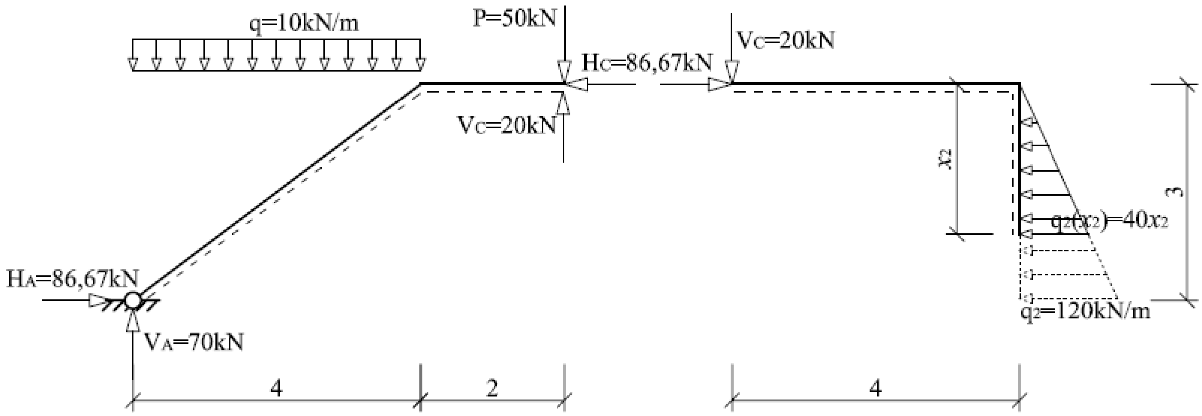


Ekstremum lokalne na wykresie momentów występuje w przekroju, w którym siła tnąca T = 0. Wyznaczamy położenie x_1 ekstremum oraz jego wartość:

$$\mathrm{V_A}\cos\alpha - \mathrm{H_A}\sin\alpha - \mathrm{q}\,x_1\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{\mathrm{V_A}\cos\alpha - \mathrm{H_A}\sin\alpha}{\mathrm{q}\,\cos\alpha} = \frac{4}{10\cdot 0{,}8} = 0{,}5\ \mathrm{m}$$

$$\mathrm{M}(x_1) = \mathrm{V_A}\,x - \mathrm{H_A}\,\frac{3}{4}x - \mathrm{q}\,\frac{x_1^2}{2} = 70\cdot 0{,}5 - 86{,}67\cdot 0{,}375 - 10\cdot\frac{0{,}5^2}{2} = 1{,}25\ \mathrm{kNm}$$

Położenie x_2 ekstremum odmierzamy najlepiej od początku obciążenia q_2 (od miejsca, gdzie $q_2 = 0$). Dla ułatwienia dzielimy ramę w przegubie i bierzemy pod uwagę tylko jej prawą część.



Ponieważ wartość obciążenia na pręcie pionowym zmienia się liniowo, musimy wyznaczyć zależność pomiędzy tą wartością a położeniem przekroju. Obliczamy $q_2(x_2)$ z proporcji

$$\frac{\mathrm{q_2}(x_2)}{x_2} = \frac{120}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{q_2}(x_2) = 40\,x_2\ [\mathrm{kN/m}]$$

$$\mathrm{T}(x_2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{H_C} - \frac{1}{2}\,\mathrm{q_2}(x_2)\,x_2 = 0$$

$$\mathrm{H_C} - \frac{1}{2}\cdot 40\,x_2\cdot x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \sqrt{\frac{\mathrm{H_C}}{\frac{1}{2}\cdot 40}} = \sqrt{\frac{86{,}67}{20}} = 2{,}08\ \mathrm{m}$$

$$\mathrm{M}(x_2) = \mathrm{H_C}\,x_2 - \mathrm{V_C}\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 40\,x_2\cdot x_2\cdot\frac{1}{3}\,x_2 = 86{,}67\cdot 2{,}08 - 20\cdot 4 - \frac{40}{6}\cdot\ 2{,}08^3 = 40{,}28\ \mathrm{kNm}$$

mgr inż. Anna Jabłonka