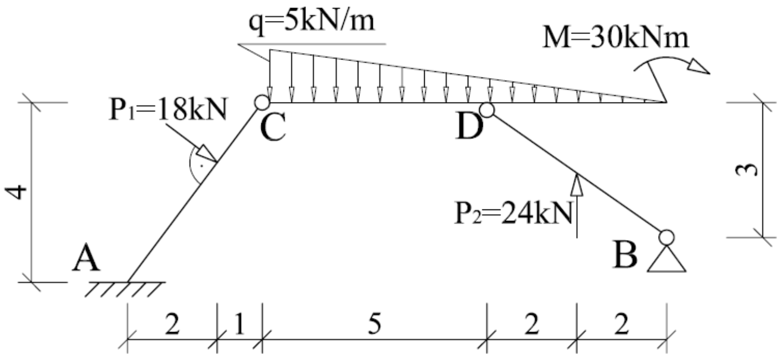
Zadanie 3

Obliczyć reakcje w podporach ramy.



Rozwiązanie:

Ramę umieszczamy w układzie współrzędnych $\{x,y\}$ i w miejscu podpór zakładamy reakcje. Podpora A jest utwierdzeniem, zatem zakładamy w niej dwie składowe reakcji R_{Ax} i R_{Ay} oraz moment utwierdzenia M_A, zaś w podporze przegubowej nieprzesuwnej B wstawiamy składowe R_{Bx} i R_{By}.

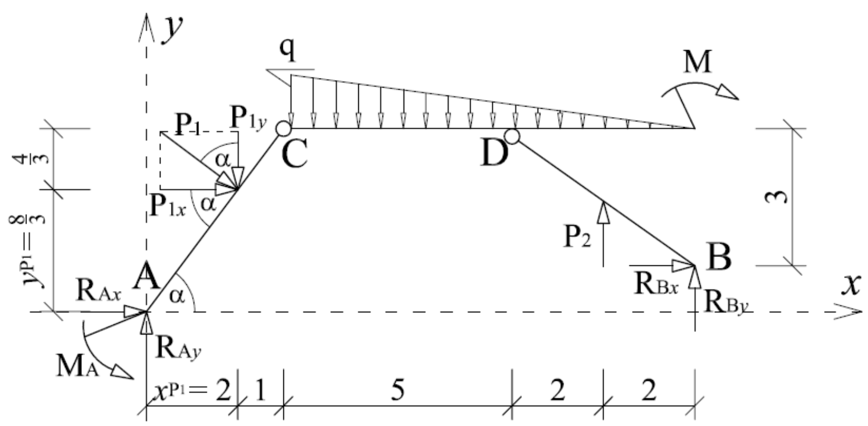
Siłę P_1, która jest prostopadła do pręta, rozkładamy na składowe: poziomą P_{1x} i pionową P_{1y}. Zależności pomiędzy składowymi a wypadkową P_1 zapisujemy w postaci funkcji trygonometrycznych dla pomocniczo oznaczonego kąta α:

$\sin\alpha = \frac{P_{1x}}{P_1} \quad \Rightarrow \quad P_{1x} = P_1 \sin\alpha, \qquad \cos\alpha = \frac{P_{1y}}{P_1} \quad \Rightarrow \quad P_{1y} = P_1 \cos\alpha$

Funkcje trygonometryczne dla kąta α otrzymujemy z geometrii układu: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

Stąd składowe siły P_1 są równe: $P_{1x} = 18 \cdot \frac{4}{5} = 14{,}4$ kN, $P_{1y} = 18 \cdot \frac{3}{5} = 10{,}8$ kN

Punkt przyłożenia siły P_1 na pręcie ukośnym znajduje się w odległości poziomej $x_{P_1} = 2$ m. Odległość pionową y_{P_1} wyznaczamy ze stosunku: $\frac{y_{P_1}}{4} = \frac{x_{P_1}}{3} \quad \Rightarrow \quad y_{P_1} = \frac{4}{3}\, x_{P_1} = \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3}$ m



Reakcje w podporach wyznaczamy z równań równowagi. Możemy zacząć od równania sumy momentów względem przegubu D dla prawej strony, czyli pręta DB (nie przecinając pręta poziomego, ponieważ przegub go nie przecina)

$\sum m_D^P = R_{Bx} \cdot 3 + R_{By} \cdot 4 + P_2 \cdot 2 = 0$

Otrzymaliśmy równanie z dwoma niewiadomymi R_{Bx} i R_{By}. Aby obliczyć wartości składowych, piszemy inne równanie, w którym R_{Bx} i R_{By} będą jedynymi niewiadomymi, tj. równanie sumy momentów względem przegubu C dla prawej strony

$$\sum m_{\mathrm{C}}^{\mathrm{P}} = \mathrm{R}_{\mathrm{B}x} \cdot 3 + \mathrm{R}_{\mathrm{B}y} \cdot 9 + \mathrm{P}_2 \cdot 7 - \mathrm{M} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{q} \cdot 9 \cdot \frac{9}{3} = 0$$

Następnie rozwiązujemy układ równań z dwoma niewiadomymi, np. metodą przeciwnych współczynników, dodając do siebie stronami równania:

$$\begin{cases} -\mathrm{R}_{\mathrm{B}x} \cdot 3 - \mathrm{R}_{\mathrm{B}y} \cdot 4 - \mathrm{P}_2 \cdot 2 = 0 \\ \mathrm{R}_{\mathrm{B}x} \cdot 3 + \mathrm{R}_{\mathrm{B}y} \cdot 9 + \mathrm{P}_2 \cdot 7 - \mathrm{M} - \frac{27}{2}\mathrm{q} = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{R}_{\mathrm{B}y} \cdot 5 + \mathrm{P}_2 \cdot 5 - \mathrm{M} - \frac{27}{2}\mathrm{q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R}_{\mathrm{B}y} = -\mathrm{P}_2 + \frac{1}{5}\mathrm{M} + \frac{27}{10}\mathrm{q} = -24 + \frac{1}{5} \cdot 30 + \frac{27}{10} \cdot 5 = -4{,}5 \text{ kN}$$

Z równania sumy momentów względem przegubu D dla prawej strony mamy

$$\mathrm{R}_{\mathrm{B}x} = -\frac{4}{3}\mathrm{R}_{\mathrm{B}y} - \frac{2}{3}\mathrm{P}_2 = -\frac{4}{3} \cdot (-4{,}5) - \frac{2}{3} \cdot 24 = -10 \text{ kN}$$

Składowe R_{Ax} i R_{Ay} możemy wyznaczyć z równań sumy rzutów sił na osie *x* i *y*:

$$\sum r_x = \mathrm{R}_{\mathrm{A}x} + \mathrm{R}_{\mathrm{B}x} + \mathrm{P}_{1x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R}_{\mathrm{A}x} = -\mathrm{R}_{\mathrm{B}x} - \mathrm{P}_{1x} = -(-10) - 14{,}4 = -4{,}4 \text{ kN}$$

$$\sum r_y = \mathrm{R}_{\mathrm{A}y} + \mathrm{R}_{\mathrm{B}y} - \mathrm{P}_{1y} + \mathrm{P}_2 - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{q} \cdot 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{R}_{\mathrm{A}y} = -\mathrm{R}_{\mathrm{B}y} + \mathrm{P}_{1y} - \mathrm{P}_2 + \frac{9}{2}\mathrm{q} = -(-4{,}5) + 10{,}8 - 24 + \frac{9}{2} \cdot 5 = 13{,}8 \text{ kN}$$

Moment utwierdzenia M_A wyznaczamy np. z równania sumy momentów względem przegubu C dla lewej strony

$$\sum m_{\mathrm{C}}^{\mathrm{L}} = \mathrm{M}_{\mathrm{A}} + \mathrm{R}_{\mathrm{A}x} \cdot 4 - \mathrm{R}_{\mathrm{A}y} \cdot 3 + \mathrm{P}_{1x} \cdot \frac{4}{3} + \mathrm{P}_{1y} \cdot 1 = 0$$

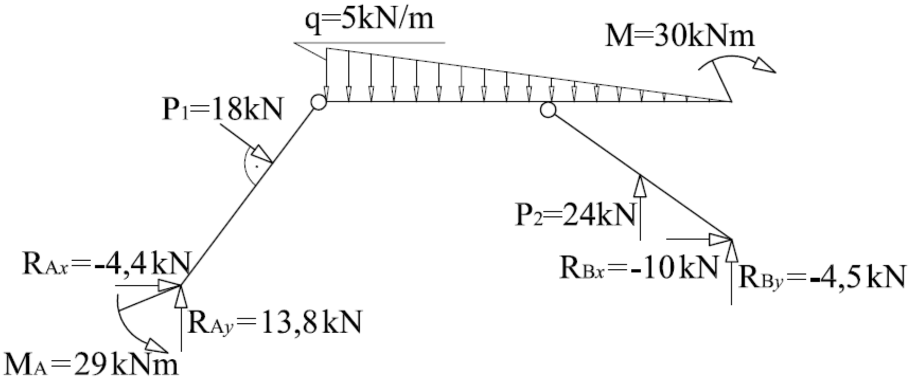
$$\Rightarrow \quad \mathrm{M}_{\mathrm{A}} = -4\mathrm{R}_{\mathrm{A}x} + 3\mathrm{R}_{\mathrm{A}y} - \frac{4}{3}\mathrm{P}_{1x} - \mathrm{P}_{1y} = -4 \cdot (-4{,}4) + 3 \cdot 13{,}8 - \frac{4}{3} \cdot 14{,}4 - 10{,}8 = 29 \text{ kNm}$$

W celu sprawdzenia poprawności wykonanych obliczeń, układamy sumę momentów względem innego niż wcześniej punktu, np. względem punktu B

$$\sum m_{\mathrm{B}} = \mathrm{M}_{\mathrm{A}} + \mathrm{R}_{\mathrm{A}x} \cdot 1 - \mathrm{R}_{\mathrm{A}y} \cdot 12 - \mathrm{P}_{1x} \cdot \frac{5}{3} + \mathrm{P}_{1y} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{q} \cdot 9 \cdot 6 - \mathrm{M} - \mathrm{P}_2 \cdot 2 =$$

$$= 29 + (-4{,}4) \cdot 1 - 13{,}8 \cdot 12 - 14{,}4 \cdot \frac{5}{3} + 10{,}8 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 9 \cdot 6 - 30 - 24 \cdot 2 = 0$$

Otrzymaliśmy $\sum m_{\mathrm{B}} = 0$, zatem równanie sprawdzające zostało spełnione.



Ostatecznie otrzymaliśmy układ, w którym wszystkie obciążenia i reakcje podporowe się równoważą.